

考虑时变相关性的多退化特征设备剩余寿命预测

张迦陵, 张建勋, 杜党波, 张正新, 胡昌华
(火箭军工程大学智剑实验室, 710025, 西安)

摘要: 针对多退化特征设备剩余寿命预测中现有方法采用静态相关性模型, 对相关性时变形式做潜在假定导致模型在复杂工况下适应性不足的问题, 提出一种基于时变 Copula 函数的多退化特征设备剩余寿命预测方法。基于非线性维纳过程建立各自退化特征模型, 利用时变 Copula 函数构建多个特征退化模型间的时变相关性; 通过贝叶斯马尔可夫链蒙特卡罗梅特罗波利斯-黑斯廷斯算法与极大似然估计算法, 实现非线性维纳过程模型和时变 Copula 函数的参数辨识; 依据赤池信息量准则优选时变 Copula 函数形式, 结合边缘分布推导设备预测的剩余寿命联合分布。通过数值仿真数据和高炉炉壁的实际数据进行验证, 结果表明: 所提方法得到的剩余寿命平均均方误差相比 3 个退化特征独立情况降低了 8.62%, 比静态 Copula 函数降低了 5.57%, 比动态贝叶斯网络减少了 17.85%; 所提方法能够有效表征多退化特征的时变退化相关性对于剩余寿命预测的影响。该方法可为多退化特征设备剩余寿命预测提供一种有效解决方案。

关键词: 剩余寿命预测; 退化特征; 时变相关性; 时变 Copula 函数

中图分类号: TH17 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202510020 **文章编号:** 0253-987X(2025)10-0210-11

Remaining Useful Life Prediction of Multi-Degradation Feature Equipment Considering Time-Varying Correlation

ZHANG Jialing, ZHANG Jianxun, DU Dangbo, ZHANG Zhengxin, HU Changhua
(Zhijian Laboratory, Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China)

Abstract: To address the issue of insufficient adaptability of existing methods in remaining useful life (RUL) prediction for multi-degradation feature equipment, where static correlation models or potential assumptions about time-varying correlation forms lead to poor performance under complex operating conditions, a time-varying Copula-based RUL prediction method is proposed. First, nonlinear Wiener processes are employed to establish models for individual degradation features, while time-varying Copula functions are introduced to capture dynamic correlations among multiple degradation models. Second, parameter identification for both the nonlinear Wiener processes and the time-varying Copula functions is achieved via Bayesian Markov chain Monte Carlo Metropolis-Hastings and maximum likelihood estimation. Finally, the optimal time-varying Copula form is selected using the Akaike information criterion, and the joint distribution of predicted RUL is derived by integrating marginal distributions. Verification is performed using numerical simulation data and actual data from a blast furnace wall. Experimental results indicate

that the proposed method reduces the mean square error of RUL predictions by 8.62% compared to independent modeling of three degradation characteristics, 5.57% over static Copula function, and 17.85% against dynamic Bayesian network methods. The proposed method can accurately characterizes the impact of time-varying degradation correlations of multiple degenerative features on RUL prediction, offering a more effective solution for predicting the remaining useful life of multi-degradation feature equipment.

Keywords: remaining useful life; degradation processes; time-varying correlation; time-varying Copula function

剩余寿命(RUL)预测是预测与健康管理(PHM)技术的关键核心部分,准确预测系统剩余寿命能够为系统后续的维修决策提供重要理论依据和充足的信息支撑^[1-2]。因此,剩余寿命预测方法逐渐成为 PHM 领域的研究热点之一,并在许多工业系统中得到了广泛的应用。剩余寿命预测方法可分为基于失效机理方法、数据驱动方法和混合驱动方法^[3]。其中,数据驱动方法主要包括机器学习和随机过程模型方法^[4]。随机过程模型方法主要是利用维纳过程^[5]、伽马过程^[6]和逆高斯过程^[7]等来描述,并通过外推得到超过阈值的时间来预测设备剩余寿命^[8-9]。由于该方法能够有效描述退化过程中固有的不确定性,在近年来研究中受到了极大的关注。

在实际中,设备往往具有多个退化特征,这给剩余寿命的预测带来了困难^[10]。为了有效预测多个退化特征设备的剩余寿命,可通过 Copula 函数来整合从每个退化特征得出的剩余寿命边缘分布,进而得到设备剩余寿命的联合分布。许先鑫等^[11]用 K-means 聚类分类航空发动机工作状态,基于 Copula 函数对 3 组传感器数据建模,其剩余寿命预测精度较传统方法显著提升。Meng 等^[12]结合 Copula 熵特征选择与 Transformer 模型,在 XJTU-SY 数据集上增强了剩余寿命预测泛化能力。Liu 等^[13]用非线性维纳过程对单退化特征进行建模,通过贝叶斯方法更新模型参数,再以 R-Vine Copula 刻画多传感器相关性实现航空发动机剩余寿命在线预测。张建勋等^[14]用维纳过程和方差值正态过程对陀螺仪多元退化过程进行建模,借助 Copula 函数构建可靠性模型预测剩余寿命。Peng 等^[15]基于 Copula 函数和批处理粒子滤波器构建含测量误差的多元退化模型,通过锂离子电池案例验证剩余寿命预测有效性。

现有文献多采用静态相关性模型,假定多退化特征间相关性不随时间变化。但是,工程中系统运行环境和负载条件多变,可能导致相关性改变,因此有必要在多退化特征设备剩余寿命预测中考虑时变

相关性。目前,部分学者已开展相关研究,Yang 等^[16]针对高可靠性产品的多元退化过程,用非线性维纳过程构建边缘退化模型,以 ARMA(1,10)模型作为动态演化方程,用时变 Copula 函数描述 2 个退化过程的联合依赖结构,采用极大似然估计算法、赤池信息量准则(AIC)和贝叶斯信息准则等进行模型参数估计与筛选,并通过石英微机械陀螺仪案例验证方法有效性。王蕾等^[17]针对多部件失效相关的机械系统,引入非线性维纳过程刻画性能退化,采用傅里叶级数时变 Copula 函数描述多部件退化失效间的相关性,通过似然比统计量检验时变相关性,用马尔可夫链蒙特卡罗(MCMC)和极大似然估计(MLE)算法估计参数,实现多部件系统可靠性评估。Xiao 等^[18]针对腐蚀天然气管道可靠性分析问题,提出基于 Copula 理论和重要抽样的时变可靠性分析方法,利用 Copula 函数对随机变量依赖结构进行建模,用重要抽样提高分析效率,通过伽马过程和线性模型对腐蚀缺陷的深度和长度进行时变建模,结合齐次泊松过程考虑新缺陷产生,实现管道时变可靠性全面评估。

上述文献在构建模型时,对时变 Copula 函数的演化方程形式做了潜在假定,而实际中多退化特征设备的运行环境复杂,相关性具有高度不确定性,难以预知其变化趋势、程度及类型。这种假定导致模型在面对复杂时变情况时适应性差,无法准确描述特征间的真实关系,使得剩余寿命预测结果偏离实际,影响预测的可靠性与有效性。鉴于此,本文针对具有多个退化特征的退化设备,提出了一种新的剩余寿命预测方法。该方法采用多种方式表示时变 Copula 函数中参数的动态演变过程:通过多项式、傅里叶级数和 ARMA(1,10)模型,增强对复杂时变相关性的刻画能力;分别利用贝叶斯 MCMC 梅特罗波利斯-黑斯廷斯(M-H)算法和 MLE 算法来估计单个退化模型和时变 Copula 函数的参数;结合单个退化特征的剩余寿命边缘分布,进一步推导出竞争失

效模式下设备剩余寿命的联合分布。

1 问题描述

本文主要研究竞争失效模式下多退化特征设备的剩余寿命预测。在实际工程中,随机退化设备往往具有多个退化特征,在竞争失效模式下,任意一个退化特征超过阈值均会导致设备失效。由于设备内在结构的复杂性、各退化特征之间的关联性,这些退化特征之间常常存在时变相关性。

假设某一设备存在 n 个退化特征,在时刻 t 其退化变量分别为 $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$, 定义该设备的退化变量 $\mathbf{X}(t)$ 为

$$\mathbf{X}(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)]^T \quad (1)$$

式中: $X_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, 为第 i 的退化特征的退化变量; n 为退化特征数。

基于式(1)的退化变量,本文需要解决的问题如下。

(1) 单个退化特征剩余寿命预测。通过退化变量的监测数据建立每个退化特征的边缘退化模型,并得到首达时间下第 i 个退化特征的剩余寿命 $L_{i,k}$ [19] 的累积分布函数(CDF)、分布概率密度函数(PDF)和可靠度函数(CRF)。

(2) 多退化特征剩余寿命预测。当设备有 n 个退化特征时,在竞争失效模式下,根据设备在首达时间下的剩余寿命 L_k [20] 得到设备剩余寿命的联合分布 CDF、PDF 和 CRF。

2 退化特征的退化建模

2.1 基于非线性维纳过程的单退化特征建模

维纳过程因其广泛的适用性而在退化建模中尤为常见。然而,由于设备受到负载、内部状态和外部环境变化的影响,其退化过程可能会表现出非线性特征。因此,本文选择使用非线性维纳过程对退化变量进行建模。

基于文献[21],对于第 i 个退化特征的退化过程, t 时刻退化变量 $X_i(t)$ 非线性维纳过程的表达式如下

$$X_i(t) = X_i(0) + \int_0^t \mu_i(\tau, \boldsymbol{\theta}_i) d\tau + s_i B(t) \quad (2)$$

式中: $X_i(0)$ 为第 i 个退化特征在初始时刻的退化量,本文主要考虑 $X_i(0) = 0$ 的情形; $\int_0^t \mu_i(\tau, \boldsymbol{\theta}_i) d\tau$ 为第 i 个退化特征的漂移系数,是时间 t 的非线性函数,用于表征模型的非线性特征, $\boldsymbol{\theta}_i$ 为第 i 个退化特

征的漂移系数的参数向量; s_i 为第 i 个退化特征的扩散系数; $B(t)$ 为标准布朗运动。

令第 i 个退化特征的退化增量为 $\Delta X_i(t) = X_i(t) + \Delta t) - X_i(t)$, 则 $\Delta X_i(t) \sim N\left(\int_t^{t+\Delta t} \mu_i(\tau, \boldsymbol{\theta}_i) d\tau, s_i^2 \Delta t\right)$, $\Delta X_i(t)$ 的概率密度函数为

$$f(\Delta x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s_i^2 \Delta t}} \exp\left[-\frac{(\Delta X_i - \int_t^{t+\Delta t} \mu_i(\tau, \boldsymbol{\theta}_i) d\tau)^2}{2s_i^2 \Delta t}\right] \quad (3)$$

设 $t_m, m = 1, 2, \dots, M$, 为测得数据的时刻, $\mathbf{X}_{i,m} = [x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,M}]^T$ 为 t_m 时刻第 i 个退化特征退化量的监测数据,根据维纳过程的平稳独立增量性,则其退化增量 $\Delta x_{i,m}$ 的似然函数可表示为

$$L(\Delta x_{i,m} | \boldsymbol{\Psi}_i) = \prod_{m=1}^M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi s_i^2 \Delta t_m}} \exp\left[-\frac{(\Delta x_{i,m} - \int_{t_m}^{t_{m+1}} \mu_i(\tau, \boldsymbol{\theta}_i) d\tau)^2}{2s_i^2 \Delta t_m}\right] \right) \quad (4)$$

式中: $\Delta x_{i,m} = x_i(t_{m+1}) - x_i(t_m)$; $\Delta t_m = t_{m+1} - t_m$; $\boldsymbol{\Psi}_i = (\boldsymbol{\theta}_i, s_i), i = 1, 2, \dots, n$ 。由于有 n 个退化特征,考虑到高维参数直接利用极大似然估计算法估计运算量庞大,并且似然函数极为复杂,为了满足实时性要求,因此利用贝叶斯 MCMC M-H 算法进行参数估计[22]。

根据 $\boldsymbol{\Psi}_i = (\boldsymbol{\theta}_i, s_i)$ 的先验分布 $P(\boldsymbol{\Psi}_i)$ 以及贝叶斯定理可知,后验分布与似然函数和先验分布的乘积成正比,表达式为

$$P(\boldsymbol{\Psi}_i | \Delta X_i(t)) = \frac{L(\Delta X_i(t) | \boldsymbol{\Psi}_i) P(\boldsymbol{\Psi}_i)}{\int L(\Delta X_i(t) | \boldsymbol{\Psi}_i) P(\boldsymbol{\Psi}_i) d\boldsymbol{\Psi}_i} \propto L(\Delta X_i(t) | \boldsymbol{\Psi}_i) P(\boldsymbol{\Psi}_i) \quad (5)$$

用贝叶斯 MCMC M-H 算法交替采样生成 $\boldsymbol{\Psi}_i = (\boldsymbol{\theta}_i, s_i)$ 的样本,从而近似后验分布,计算 $\boldsymbol{\Psi}_i = (\boldsymbol{\theta}_i, s_i)$ 的后验均值得到参数的估计值 $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_i = (\hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \hat{s}_i)$ 。 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ 和 $\hat{s}_i$ 分别为第 i 个退化特征的漂移系数的参数向量和扩散系数的估计值,计算式为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = E[\boldsymbol{\theta}_i | \Delta X_i(t)] \quad (6)$$

$$\hat{s}_i = E[s_i | \Delta X_i(t)] \quad (7)$$

式中: E 表示求期望函数。

2.2 多退化特征建模

对于传统基于概率的方法,若这 n 个退化特征间的相关性未知,则其联合分布函数难以得到。Copula 函数可通过分别考虑随机变量的边缘分布和相关性结构,构造随机变量联合分布的方式体现变量间的相关性[17]。Copula 函数的种类较多,表 1 为常见的时变 Copula 函数形式。

表 1 常见的时变 Copula 函数形式

Table 1 Common forms of time-varying Copula functions

时变 Copula 函数	分布函数	参数取值范围	变换函数 $\Lambda(x)$
Gaussian	$C(u_1, u_2, \dots, u_n; \rho(t)) = \Phi_{\rho(t)}(\phi^{-1}(u_1), \phi^{-1}(u_2), \dots, \phi^{-1}(u_n))$	$(-1, 0) \cup (0, 1)$	$\frac{(1 - e^x)}{(1 + e^x)}$
Gumbel	$C(u_1, u_2, \dots, u_n; \rho(t)) = \exp\left\{-\left[\sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^{\rho(t)}\right]^{\frac{1}{\rho(t)}}\right\}$	$(1, +\infty)$	$1 + x^2$
Clayton	$C(u_1, u_2, \dots, u_n; \rho(t)) = \left(\sum_{i=1}^n u_i^{-\rho(t)} - n + 1\right)^{-\frac{1}{\rho(t)}}$	$(0, +\infty)$	x^2
Frank	$C(u_1, u_2, \dots, u_n; \rho(t)) = -\frac{1}{\rho(t)} \ln \left[1 + \frac{\prod_{i=1}^n (e^{-\rho(t)u_i} - 1)}{(e^{-\rho(t)} - 1)^{n-1}}\right]$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	x

时变 Copula 函数是指 Copula 函数中的参数随时间变化而变化,但 Copula 函数形式本身不发生变化。因此,建立时变 Copula 模型的关键就是确定 Copula 函数中参数的动态演变过程。将时变函数定义为 $\rho(t)$,并分别用多项式^[23]、傅里叶级数^[17]和 ARMA(1,10)模型^[24]表示。

多项式适用于退化特征间相关性随时间呈渐进增强或减弱,多项式时变函数 $\rho_1(t)$ 定义为

$$\rho_1(t) = \Lambda(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_N t^N) \quad (8)$$

式中: $a_i, i = 0, 1, \dots, N$, 为 $\rho_1(t)$ 中的未知参数; Λ 为变换函数,以保证演化方程满足 Copula 函数的参数取值范围。令 $\lambda_1 = [a_0, a_1, \dots, a_N]^T$ 为 $\rho_1(t)$ 中的未知参数向量。

傅里叶级数适用于存在季节性或周期性运行模式的设备,傅里叶级数时变函数 $\rho_2(t)$ 定义为

$$\rho_2(t) = \Lambda(h + a \sin(\Omega t) + b \cos(\Omega t)) \quad (9)$$

式中: h, a, b 为 $\rho_2(t)$ 中的未知参数。令 $\lambda_2 = [h, a, b]^T$ 为 $\rho_2(t)$ 中的未知参数向量。

ARMA(1,10)模型适用于运行环境复杂、相关性突变频繁的场景,ARMA(1,10)模型时变函数 $\rho_3(t)$ 定义为

$$\rho_3(t) = \Lambda\left(\gamma + \alpha \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} |u_{t-i} - v_{t-i}| + \beta \rho_3(t-1)\right) \quad (10)$$

式中: γ, α, β 为 $\rho_3(t)$ 中的未知参数; $\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} |u_{t-i} - v_{t-i}|$ 为退化特征边缘分布函数。令 $\lambda_3 = [\gamma, \alpha, \beta]^T$ 为 $\rho_3(t)$ 中的未知参数向量。

在实际应用中,根据设备运行数据的趋势性、周期性、突变性等特征,选择或组合演化方程,并通过

AIC 准则验证模型适应性。

3 基于时变 Copula 函数的剩余寿命预测

3.1 单退化特征下剩余寿命分布求解

对于式(2)描述的退化过程,设 t_k 为当前时刻, $l_{i,k}$ 为第 i 个退化特征在 t_k 时刻的剩余寿命, $f_{i,k}(l_{i,k})$ 为剩余寿命边缘 PDF,根据单退化特征剩余寿命 $f_{i,k}(l_{i,k})$ 的表达式^[19]为

$$\begin{cases} f_{i,k}(l_{i,k}) \cong \frac{\omega_i - x_{i,k} - \alpha_i(l_{i,k}, \hat{\theta}_i)}{\sqrt{2\pi s_i l_{i,k}^3}} \cdot \\ \exp\left[-\frac{(\omega_i - x_{i,k} - v_i(l_{i,k}))^2}{2s_i l_{i,k}}\right] \\ v_i(l_{i,k}) = \int_{t_k}^{l_{i,k}+t_k} \mu_i(\tau; \hat{\theta}_i) d\tau \\ \alpha_i(l_{i,k}; \hat{\theta}_i) = v_i(l_{i,k}) - l_{i,k} \mu_i(l_{i,k} + t_k; \hat{\theta}_i) \end{cases} \quad (11)$$

式中: ω_i 为第 i 个退化特征的阈值; $x_{i,k}$ 为第 i 个退化特征在 t_k 时刻的退化量; $\hat{\theta}_i, \hat{s}_i$ 为式(6)、(7)得到的第 i 个退化特征退化模型的参数估计值。

此外,令 $R_{i,k}(l_{i,k})$ 和 $F_{i,k}(l_{i,k})$ 分别为第 i 个退化特征剩余寿命的边缘 CRF 和边缘 CDF,且满足 $R_{i,k}(l_{i,k}) = 1 - F_{i,k}(l_{i,k})$ 。

3.2 时变 Copula 函数的剩余寿命预测联合分布

引理 假设 (X_1, X_2) 的联合分布是 H ,其边缘分布 F_1 和 F_2 均连续,且 Copula 函数为 $C(\cdot)$ 。若 $g(x_1)$ 、 $r(x_2)$ 分别是 x_1, x_2 严格单调递增函数,则 $g(X_1)$ 、 $r(X_2)$ 的 Copula 函数仍然是 $C(\cdot)$ ^[25]。

扩展到多维情况,设 l_k 为设备在 t_k 时刻的剩余寿命,第 i 个退化特征在 t_k 时刻的退化增量 $\Delta X_i(l_k$

$+t_k) = X_i(l_k + t_k) - X_i(t_k)$, $\Delta X_i(l_k + t_k)$ 在 $[t_k, t_k + l_k]$ 的波动性比较小, 因此 $\max\{\Delta X_i(l_k + t_k)\}$ 在 $[t_k, t_k + l_k]$ 具有强单调性, 几乎处处严格单调递增。设 $(\Delta X_1(l_k + t_k), \dots, \Delta X_n(l_k + t_k))$ 的 Copula 函数为 $X(\cdot)$, 则由引理和根据 Copula 函数的相关性质, $(\max\{\Delta X_1(l_k + t_k)\}, \dots, \max\{\Delta X_n(l_k + t_k)\})$ 的 Copula 函数也是 $C(\cdot)$ 。根据退化特征 CRF 的边缘分布 $R_{1,k}(l_k + t_k), R_{2,k}(l_k + t_k), \dots, R_{n,k}(l_k + t_k)$, 及多退化特征联合剩余寿命的定义^[20], 设备剩余寿命的 CRF 为

$$\begin{aligned} R_k(l_k + t_k) = & P\{(X_1(l_k + t_k) < \omega_1 \mid x_{1,k} < \omega_1, \\ & \max_{t \in [t_k, t_k + l_k]} \{X_1(t)\} < \omega_1), \dots, \\ & (X_n(l_k + t_k) < \omega_n \mid x_{n,k} < \omega_n, \\ & \max_{t \in [t_k, t_k + l_k]} \{X_n(t)\} < \omega_n)\} \cong \\ & P\{\max\{\Delta X_1(l_k + t_k)\} < \omega_1 - x_{1,k}, \dots, \\ & \max\{\Delta X_n(l_k + t_k)\} < \omega_n - x_{n,k}\} \cong \\ & C(R_{1,k}(l_k + t_k), R_{2,k}(l_k + t_k), \dots, R_{n,k}(l_k + t_k); \rho(t)) \end{aligned} \quad (12)$$

式中: $R_k(l_k + t_k)$ 为设备剩余寿命的 CRF。

根据边缘分布参数 $\hat{\Psi}_i = (\hat{\theta}_i, \hat{s}_i)$, 再对 Copula 函数中参数组 λ_1, λ_2 和 λ_3 进行估计。构造的对数似然函数为

$$L(\lambda_i; \hat{\Psi}_1, \dots, \hat{\Psi}_n) = \sum_{j=1}^k \ln c(R_{1,k}(l_k + t_k \mid \hat{\Psi}_1), \dots, R_{n,k}(l_k + t_k \mid \hat{\Psi}_n); \lambda_i), i = 1, 2, 3 \quad (13)$$

式中: $c(\cdot)$ 为 Copula 函数 $C(\cdot)$ 的分布密度函数。

MLE 方法计算效率不受特征维度影响, 仅由时变参数数量决定, 所以本文基于 MLE 方法估计时变 Copula 函数中的相关参数 $\hat{\lambda}$ 为

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda_i} L(\lambda_i; \hat{\Psi}_1, \dots, \hat{\Psi}_n), i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

时变 Copula 函数具有多种表示形式, 其中部分形式如表 1 所示。因此, 如何选择较优的时变 Copula 函数更好地描述退化特征之间的时变相关性是一个重要的问题。在模型选择中, AIC 准则因其良好的实用性和与极大似然估计的兼容性而被广泛采用, 由于本文采用极大似然估计算法来估计时变 Copula 函数中的参数, 因此选用 AIC 准则作为 Copula 函数优劣性的评判标准, AIC 值的表达式为

$$A_{IC} = -2 \ln M + 2k \quad (15)$$

式中: k 为 Copula 模型中参数的数量; M 是将式 (14) 得到的参数估计结果代入式 (13) 得到的似然函数值。 A_{IC} 越小, 刻画退化特征间的相关性越好。因此, A_{IC} 最小的时变 Copula 函数即为最佳的 Copula 函数形式。

在竞争失效模式下, 若多退化特征的相关性呈时变相关特性, 根据式 (12), 可分别得到设备剩余寿命的 CDF 和 PDF

$$F_k(l_k + t_k) = 1 - R_k(l_k + t_k) \quad (16)$$

$$f_k(l_k + t_k) = \frac{dF_k(l_k + t_k)}{dl_k} \quad (17)$$

式中: $F_k(l_k + t_k)$ 为设备剩余寿命的 CDF; $f_k(l_k + t_k)$ 为设备剩余寿命的 PDF。

4 仿真实验验证

4.1 仿真验证

首先, 考虑非线性退化模型幂函数形式 $\mu_i(t, \theta_i) = q_i d_i t^{d_i-1}$ 进行仿真验证, 其中 q_i 为第 i 个退化特征的漂移系数, 影响第 i 个退化过程的整体幅度, d_i 为第 i 个退化特征的形状参数, 控制第 i 个退化过程的非线性形态。退化特征阈值 $\omega_1 = 170, \omega_2 = 300, \omega_3 = 420$, 漂移系数和扩散系数分别 $q_1 = 1, s_1 = 1, q_2 = 2, s_2 = 3, q_3 = 3, s_3 = 1$, 形状参数 $d_i = 1.1 (i = 1, 2, 3)$, 初始状态 $X_1(0) = X_2(0) = X_3(0) = 0$, 并考虑时间序列 $t = 1, 2, \dots, 1000$ 。先计算出时变函数 $\rho(t)$, 用于刻画不同时间点变量间的相关性。接着, 对每个时间点 t 进行 1000 次基于 matlab 工具箱中 copularnd 算法的 4 种 Copula 函数 (见表 1) 的抽样, 生成 2 个二维随机向量 u_{12} 和 u_{23} , 分别用于后续生成第 1、2 个变量, 第 2、3 个变量的边缘分布。之后, 利用标准正态分布的逆累积分布函数, 将 u_{12} 和 u_{23} 转化为服从均值和标准差为 0 的正态分布随机变量 y_1, y_2 和 y_3 。对 y_1, y_2 和 y_3 分别进行累积求和, 并加上各自均值与时间序列 t 的幂次的乘积。最终, 得到 3 个退化时变相关性的非线性退化过程状态量 Y_1, Y_2 和 Y_3 。将 $\rho_1(t), \rho_2(t), \rho_3(t)$ 代入表 1 中 4 种多元 Copula 函数, 获得 12 种时变 Copula 函数。本文方法是用 12 种时变 Copula 函数将 3 个边缘 CRF 进行融合, 得到设备剩余寿命的 CRF, 再由式 (17) 得到设备剩余寿命的 PDF。将本文方法与蒙特卡罗算法得到的设备剩余寿命 PDF 进行对比, 结果如图 1 所示。

通过 AIC 准则对 12 种时变 Copula 函数进行检验, 结果如表 2 所示。

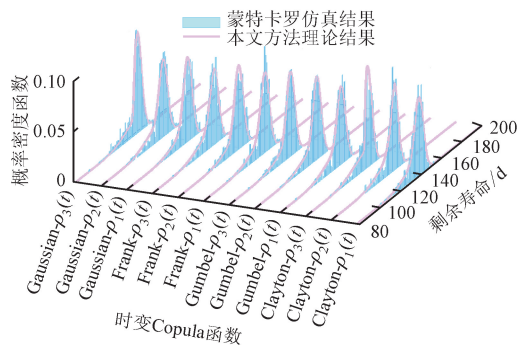


图 1 12 种时变 Copula 函数下设备剩余寿命的分布 PDF
Fig. 1 PDF of remaining lifetime distributions under 12 time-varying Copula functions

表 2 12 种时变 Copula 函数 AIC 值的比较

Table 2 Comparison of AIC values of 12 time-varying Copula functions

时变 Copula 函数	A_{IC}	时变 Copula 函数	A_{IC}
Gaussian- $\rho_1(t)$	4 125.3	Clayton- $\rho_1(t)$	8 187.7
Gaussian- $\rho_2(t)$	4 629.8	Clayton- $\rho_2(t)$	-63 464.0
Gaussian- $\rho_3(t)$	4 127.5	Clayton- $\rho_3(t)$	946.9
Frank- $\rho_1(t)$	-985.5	Gumbel- $\rho_1(t)$	-11 059.0
Frank- $\rho_2(t)$	-417.0	Gumbel- $\rho_2(t)$	-11 879.0
Frank- $\rho_3(t)$	918.5	Gumbel- $\rho_3(t)$	892.2

由表 2 可知,时变 Clayton- $\rho_2(t)$ 函数的 AIC 值最小,因此时变 Clayton- $\rho_2(t)$ 函数是描述 3 个退化特征之间相关性的较好选择,将其得到的 CRF 作为设备的 CRF。此时,退化过程状态量 Y_1 、 Y_2 和 Y_3 如图 2 所示。

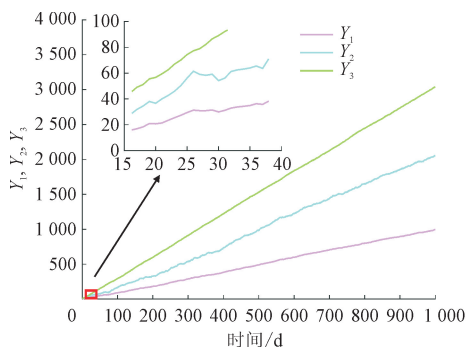


图 2 退化过程状态量 Y_1 、 Y_2 和 Y_3

Fig. 2 State parameters of degradation processes Y_1 , Y_2 and Y_3

分别计算每 2 个退化过程的 Spearman 相关系数(时间间隔为 50 min),并求得 3 组 Spearman 相关系数的均值,结果如图 3 所示。由图可知, Y_1 、 Y_2 和 Y_3 退化过程时变相关,此时 $\rho_2(t) = 2 +$

$$0.000\ 02\sin(\pi t/3) - 0.000\ 06\cos(\pi t/3)。$$

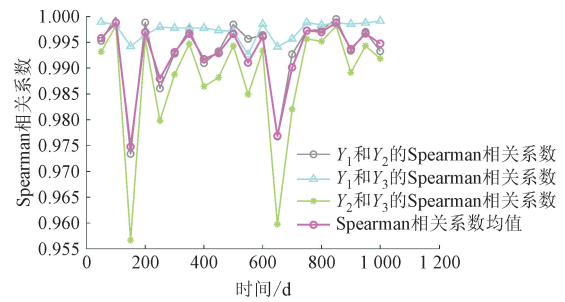


图 3 仿真数据的 Spearman 相关系数

Fig. 3 Spearman correlation coefficient of simulation data

通过时变 Clayton- $\rho_2(t)$ 函数、3 个退化特征独立、静态 Clayton Copula 函数、时变加权平均法和动态贝叶斯网络分别计算设备剩余寿命的 CRF,结果如图 4 所示。其中,3 个退化特征独立是指假设 3 个退化特征的退化过程之间是相互独立的。由图 4 可知,时变 Clayton- $\rho_2(t)$ 函数得到的设备可靠度均高于其他方法。

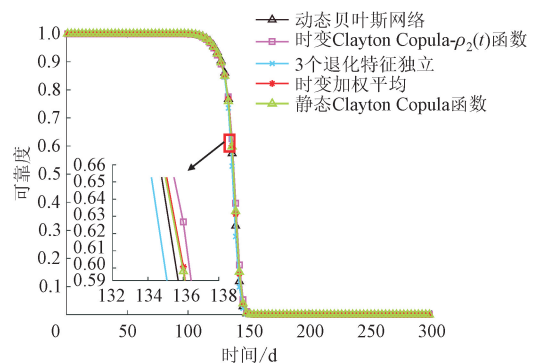


图 4 时变 Clayton- $\rho_2(t)$ 函数的 CRF 比较

Fig. 4 CRF comparison of time-varying Clayton- $\rho_2(t)$ Copula function

为了确保剩余寿命预测的准确,本节采用蒙特卡罗算法生成了 1 000 条退化轨迹^[21],然后统计其首次到达失效阈值时间点,并与不同算法的设备剩余寿命 PDF 比较,结果如图 5 所示。图中, Y_1 、 Y_2 、 Y_3 是通过式(11)得到的边缘剩余寿命 PDF。由图 5 可知,与其他算法比较,时变 Clayton- $\rho_2(t)$ 函数能够较好地贴合蒙特卡罗算法的仿真结果,表明了本文提出的时变 Clayton- $\rho_2(t)$ 函数的有效性。

仿真验证预测剩余寿命与实际剩余寿命的对比如图 6 所示。由图可知,本文提出的时变 Clayton- $\rho_2(t)$ 函数方法更加接近设备的真实剩余寿命,从而验证了该函数的实用性。

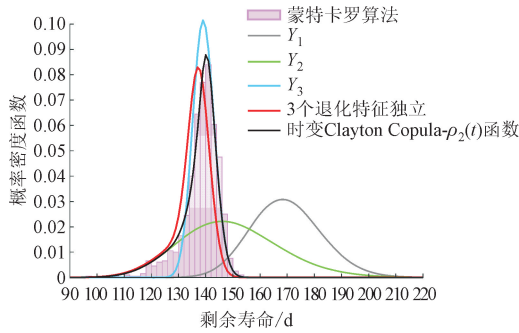


图 5 不同算法的设备剩余寿命 PDF 比较

Fig. 5 Comparison of PDFs for device RUL with different algorithms

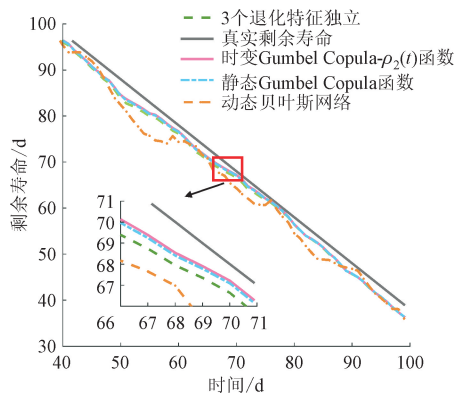


图 6 仿真验证预测剩余寿命与实际剩余寿命对比

Fig. 6 Comparison of predicted RUL and actual RUL in simulation verification

4.2 实例验证

高炉作为钢铁生产的核心装备,其运行稳定性直接影响企业生产效率与经济效益。尽管现代高炉普遍采用长寿命设计理念,但其复杂的内衬结构与高温高压的服役环境仍蕴含着显著的安全风险。尤其是炉缸炉壁的烧蚀问题,轻则导致耐火材料失效,重则引发设备炸裂事故,对生产连续性和人员安全构成严重威胁。考虑到炉衬耐火材料的劣化机理与温度场演变呈显著相关性,行业内普遍采用分布式传感技术,通过在炉壁不同区域布置热电偶阵列实现局部状态监测,从而构建精准化的炉衬维护决策模型。

基于某钢厂高炉炉壁的热电偶数据,在仿真实验中,随机选取第 9 层 2~4 号热电偶的温度数据作为退化数据。炉壁 3 个热电偶监测位置的原始温度数据如图 7 所示。由图 7 可知,同一高炉不同位置炉壁热电偶监测温度变化趋势一致但幅值不同,说明了 3 个热电偶监测得到的退化数据具有相关性。

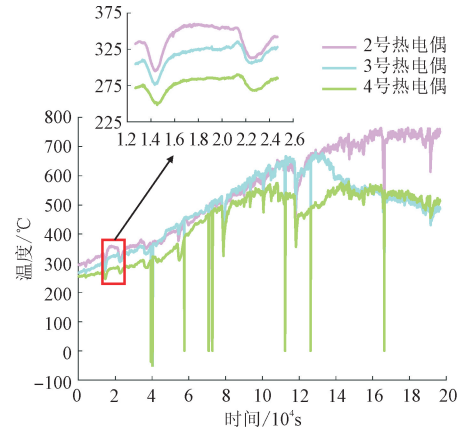


图 7 热电偶原始监测温度数据

Fig. 7 Original monitoring temperature data of thermocouple

分别计算每 2 个热电偶退化过程的 Spearman 相关系数(时间间隔为 5 000 s),并求得 3 组 Spearman 相关系数的均值,如图 8 所示,可得第 9 层 2~4 号热电偶的退化数据具有时变相关性。此外,由于热电偶损伤等因素,监测数据存在零值和负值,这些异常值将影响后续剩余寿命预测。因此,在预处理阶段,滤除原始监测数据的零值和负值,最大限度保留现有原始信息。为得到等间隔状态监测数据,将采样时间窗口设置为 1 d,缺失日期采用线性插值法补齐,可得每个热电偶的数据点为 553。

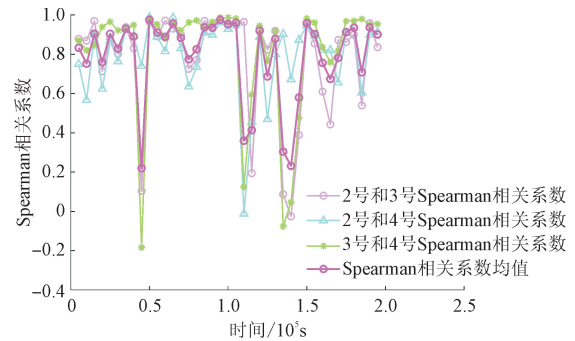


图 8 实例数据 Spearman 相关系数

Fig. 8 Spearman correlation coefficient of case data

基于 MCMC 算法估计退化模型中的未知参数,记录各参数估计后的后验均值、标准差、蒙特卡罗误差、置信水平为 95% 的最大后验密度 (HPD) 区间,单退化特征参数估计结果如表 3 所示。实测显示,对比全量更新与在线递推更新的计算效率,本文方法将 $n=5$ 的单轮剩余寿命预测耗时从原始 MCMC 的 5 min 降至 5.831 247 s,验证了本文方法的实用性。当退化特征维度 $n=12$ 时,每个热电偶的数据点为 554,24 h 间隔的在线更新单轮剩余寿

命预测耗时仅 17.857 417 s,可满足实际中大多数设备的响应需求。采用 4 种常见的多元时变 Copula 函数将三元边缘分布进行融合,并通过极大似然估计算法得到时变 Copula 函数的参数结果,通

过 AIC 准则对这些模型进行检验,结果如表 4 所示。从表 4 可知,时变 Gumbel- $\rho_2(t)$ 函数的 AIC 值最小,因此该函数是描述 3 个热电偶之间的退化相关性的较好选择,并将其得到的 CRF 作为设备的 CRF。

表 3 单退化特征参数估计结果

Table 3 Parameter estimation results of single degenerate characteristic

热电偶	参数	均值	标准差	蒙特卡罗误差	95% HPD 区间
2 号	q_1	0.037 8	0.009 7	$2.175\ 0 \times 10^{-5}$	(0.018 7, 0.056 8)
	s_1	2.170 2	0.022 9	$5.122\ 9 \times 10^{-5}$	(2.125 3, 2.215 1)
	d_1	1.730 5	0.015 5	$3.457\ 0 \times 10^{-5}$	(1.700 2, 1.760 8)
3 号	q_2	-0.023 7	0.012 9	$2.876\ 6 \times 10^{-5}$	(-0.048 9, 0.001 5)
	s_2	1.528 4	0.012 1	$2.703\ 2 \times 10^{-5}$	(1.504 7, 1.552 1)
	d_2	1.685 5	0.015 5	$3.457\ 0 \times 10^{-5}$	(1.655 2, 1.715 8)
4 号	q_3	0.023 3	0.013 1	$2.932\ 7 \times 10^{-5}$	(-0.002 4, 0.049 0)
	s_3	1.528 4	0.016 1	$3.592\ 9 \times 10^{-5}$	(1.504 7, 1.552 1)
	d_3	1.685 5	0.015 5	$3.457\ 0 \times 10^{-5}$	(1.650 5, 1.711 1)

表 4 12 种时变 Copula 函数参数估计值与 AIC 值

Table 4 Parameter estimation results and AIC values of 12 time-varying Copula functions

时变 Copula 函数	参数估计值	AIC
Gaussian- $\rho_1(t)$	$a_0=0.666\ 6, a_1=-0.014\ 7, a_2=4.054\ 1 \times 10^{-5}$	8 625.6
Gaussian- $\rho_2(t)$	$h=0.384\ 7, a=-2.1 \times 10^{-3}, b=-3.368\ 1 \times 10^{-5}$	8 625.7
Gaussian- $\rho_3(t)$	$\alpha=0.010\ 2, \beta=1.082 \times 10^{-4}, \gamma=1.051\ 5 \times 10^{-6}$	8 625.9
Frank- $\rho_1(t)$	$a_0=0.108\ 4, a_1=2.689\ 4 \times 10^{-4}, a_2=4.357\ 7 \times 10^{-6}$	-37.055 5
Frank- $\rho_2(t)$	$h=1.260\ 9, a=2.842\ 4 \times 10^{-4}, b=-6.907\ 6 \times 10^{-4}$	-663.788 7
Frank- $\rho_3(t)$	$\alpha=0.094\ 3, \beta=1.093\ 9 \times 10^{-4}, \gamma=2.858\ 3 \times 10^{-6}$	217.755 7
Clayton- $\rho_1(t)$	$a_0=0.560\ 5, a_1=9.8 \times 10^{-3}, a_2=-2.376\ 1 \times 10^{-5}$	-916.509 2
Clayton- $\rho_2(t)$	$h=0.559, a=-3.2 \times 10^{-3}, b=1.943\ 4 \times 10^{-6}$	207.074 7
Clayton- $\rho_3(t)$	$\alpha=0.010\ 9, \beta=1.030\ 1 \times 10^{-4}, \gamma=0.011\ 2 \times 10^{-6}$	217.855 3
Gumbel- $\rho_1(t)$	$a_0=0.115\ 5, a_1=1.166\ 7 \times 10^{-4}, a_2=4.933\ 3 \times 10^{-6}$	-15 232
Gumbel- $\rho_2(t)$	$h=0.099\ 5, a=3.574\ 9 \times 10^{-4}, b=5.832\ 1 \times 10^{-4}$	-18 058
Gumbel- $\rho_3(t)$	$\alpha=0.076\ 6, \beta=1.049\ 8 \times 10^{-4}, \gamma=3.613\ 2 \times 10^{-6}$	218

采用时变 Gumbel- $\rho_2(t)$ 函数方法得到 CRF,并与 3 个热电偶退化独立、静态 Copula 函数、时变加权平均法和动态贝叶斯网络的 CRF 进行对比,结果如图 9 所示,可知时变 Gumbel- $\rho_2(t)$ 函数得到的设备可靠度高于其他方法。

实例验证预测得到的剩余寿命与实际剩余寿命的对比如图 10 所示,可知本文时变 Copula 函数的方法更加接近设备的真实剩余寿命情况,说明了本文方法的有效性和实用性。

为了进一步比较本文方法和其他方法所得到的剩余寿命预测结果,均方误差(MSE)被作为评判指

标,表达式为

$$E_k = \int_0^{\infty} (l_k - \tilde{l}_k)^2 f_k(l_k) dl_k \quad (18)$$

式中: $\tilde{l}_k$ 表示 t_k 时刻设备真实的剩余寿命。通常, MSE 越小,表明预测结果越精确。对比本文提出的时变 Gumbel- $\rho_2(t)$ 函数、3 个热电偶独立、静态 Copula 函数和动态贝叶斯方法 4 种模型 MSE 值,结果如图 11 所示。由图可知,时变 Gumbel- $\rho_2(t)$ 函数具有更小的 MSE,相比 3 个热电偶独立时降低了 8.62%,比静态相关时降低了 5.57%,比动态贝叶斯网络方法降低了 17.85%,说明本文所提方法能有效提高剩余寿命预测精度。

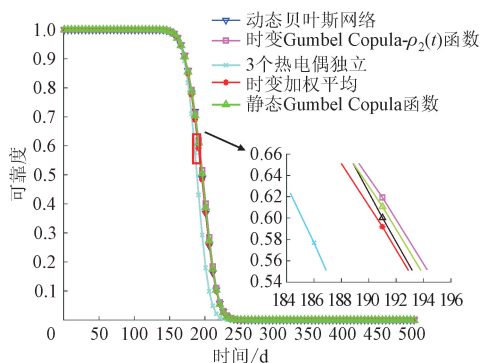
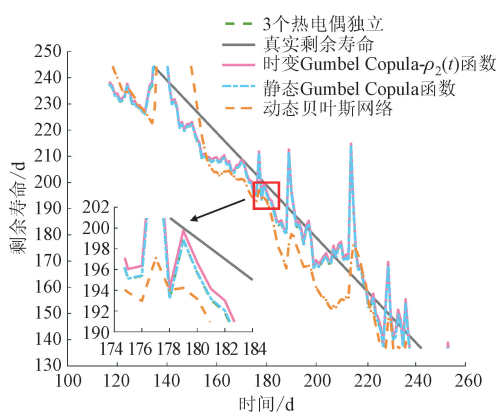
图 9 时变 Gumbel- $\rho_2(t)$ 函数的 CRF 比较Fig. 9 CRF comparison of time-varying Gumbel- $\rho_2(t)$ function

图 10 实例验证预测剩余寿命与实际剩余寿命对比

Fig. 10 Comparison of predicted RUL and actual RUL in case verification

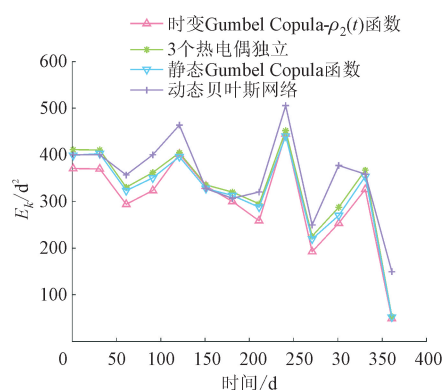


图 11 不同算法剩余寿命预测 MSE 的对比

Fig. 11 Comparison of MSE for RUL prediction among different algorithms

基于第 9 层 3、5、9、12 个热电偶剩余寿命开展设备剩余寿命预测敏感性实验。热电偶数表示退化特征数量。不同退化特征数量下预测的设备剩余寿

命均方根误差 (RMSE) 的表达式为

$$R_k = \sqrt{\int_0^{\infty} (l_k - \bar{l}_k)^2 f_k(l_k) dl_k} \quad (19)$$

不同退化特征数量的设备剩余寿命均方根误差箱线图如图 12 所示。由图可知, 3~9 个退化特征数量配置更易获稳定准确的设备剩余寿命预测结果, 若用 12 个及以上, 需结合特征筛选、噪声抑制等数据预处理及优化参数估计方法提升精度与稳定性。

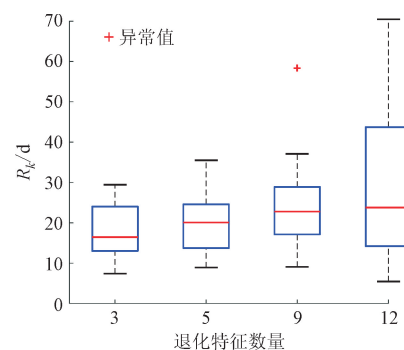


图 12 不同退化特征数量的设备剩余寿命均方根误差

Fig. 12 RMSE of remaining useful life of equipment with different numbers of degradation characteristics

基于第 9 层 3 个热电偶增加不同标准差 $\sigma_B = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$ 的高斯噪声进行设备剩余寿命预测敏感性实验, 对比不同热电偶数量下的 RMSE, 得其箱线图, 如图 13 所示。图 13 表明: 噪声会干扰模型信息的提取, 增加参数估计难度; 当噪声标准差超 0.15 时, 预测精度下降。工程中可通过卡尔曼滤波等滤波算法预处理数据, 优化传感器选型布置, 或结合模型正则化增强抗噪能力, 以保障预测精度和稳定性。

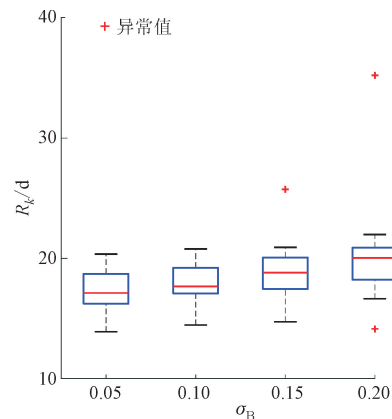


图 13 不同标准差高斯噪声的设备剩余寿命均方根误差

Fig. 13 RMSE of equipment RUL for Gaussian noise with different varying standard deviations

5 结 论

针对多退化特征设备竞争失效模式下的剩余寿命预测难题,提出融合非线性维纳过程、时变 Copula 函数及时变参数估计的方法。以非线性维纳过程刻画单特征退化,时变 Copula 函数描述多特征时变相关性;经贝叶斯 MCMC M-H、极大似然估计算法辨识参数,结合 AIC 准则优选时变 Copula 函数并推导剩余寿命联合分布,为竞争失效场景中多元退化特征具有时变相关性的剩余寿命预测方法提供理论支撑。通过理论建模、数值仿真及实例验证,可得如下结论。

(1)高炉炉壁热电偶数据的实例验证结果表明,时变 Copula 函数模型预测剩余寿命的平均 MSE,较 3 个退化特征独立、静态 Copula 函数、动态贝叶斯网络分别降低了 8.62%、5.57%、17.85%,验证了时变相关性建模对提高剩余寿命预测精度、适配复杂场景的必要性。

(2)时变 Copula 函数模型预测贴合实际剩余寿命,优于传统方法。当退化特征数为 12 时,单轮剩余寿命预测耗时 17.857 417 s,满足工业实时性需求,可有效用于工程实践,支撑设备健康管理。

(3)当退化特征数为 3~9 时,预测精度与稳定性最优。当噪声标准差超 0.15 时,预测精度下降。

本研究可为工程传感器配置、噪声抑制策略提供量化参考,助力提升剩余寿命预测实用性。

参考文献:

- [1] 李天梅,司小胜,张建勋. 多源传感监测线性退化设备数模联动的剩余寿命预测方法 [J]. 航空学报, 2023, 44(8): 89-107.
LI Tianmei, SI Xiaosheng, ZHANG Jianxun. Data-model interactive remaining useful life prediction method for multi-sensor monitored linear stochastic degrading devices [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2023, 44(8): 89-107.
- [2] 张迦陵,张建勋,杜党波,等. 考虑备件退化的贮备系统剩余寿命预测方法 [J]. 西安交通大学学报, 2024, 58(12): 175-185.
ZHANG Jialing, ZHANG Jianxun, DU Dangbo, et al. Prediction method for remaining useful life of standby systems considering degradation of spare parts [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2024, 58(12): 175-185.
- [3] LI Huiqin, ZHANG Zhengxin, LI Tianmei, et al. A review on physics-informed data-driven remaining useful life prediction: challenges and opportunities [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2024, 209: 111120.
- [4] ARTELT M, WEIß M, DITTLER D, et al. Hybrid approaches and datasets for remaining useful life prediction: a review [J]. Procedia CIRP, 2024, 130: 294-300.
- [5] KUZIO D, ZIMROZ R, WYŁOMANSKA A. A modified gamma process for RUL prediction based on data with time-varying heavy-tailed distribution [J]. Information Sciences, 2025, 690: 121603.
- [6] LI Zan, HU Qingpei, YANG Qingyu, et al. Statistical analysis and optimal inspection planning for lifetime delayed gamma degradation processes [J]. Quality and Reliability Engineering International, 2022, 38(6): 2986-3001.
- [7] DAS M, NAIKAN V N A, PANJA S C. Reliability analysis of cutting tools using transformed inverse Gaussian process-based wear modelling considering parameter dependence [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2024, 78: 103698.
- [8] 杨家鑫,唐圣金,李良,等. 基于隐含非线性维纳退化过程的剩余寿命预测 [J]. 北京航空航天大学学报, 2024, 50(1): 328-340.
YANG Jiaxin, TANG Shengjin, LI Liang, et al. Remaining useful life prediction based on implicit nonlinear Wiener degradation process [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2024, 50(1): 328-340.
- [9] 李军星,李文琪,姜泰山,等. 考虑状态增量的自适应 Wiener 过程剩余寿命预测 [J]. 计算机集成制造系统, 2025, 31(1): 306-315.
LI Junxing, LI Wenqi, LOU Taishan, et al. Remaining life prediction method based on adaptive Wiener process by considering state increments [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2025, 31(1): 306-315.
- [10] 董增寿,裴杰,石慧,等. 基于藤蔓树降维剪枝的多部件系统剩余寿命预测 [J]. 振动与冲击, 2024, 43(21): 31-45.
DONG Zengshou, PEI Jie, SHI Hui, et al. Residual life prediction of multi-component system based on vine tree reduced-dimensional reduction pruning [J]. Journal of Vibration and Shock, 2024, 43(21): 31-45.
- [11] 许先鑫,李娟,孙秀慧,等. 基于 Copula 相似性的航空发动机 RUL 预测 [J]. 航空动力学报, 2024, 39(8): 505-512.
XU Xianxin, LI Juan, SUN Xiuhui, et al. RUL pre-

- diction for aero-engines based on Copula similarity [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2024, 39(8): 505-512.
- [12] MENG Zong, MA Shufan, CAO Wei, et al. A remaining useful life prediction method of rolling bearings by RSA-BAFT combined with Copula Entropy feature selection [J]. *Expert Systems with Applications*, 2025, 275: 127100.
- [13] LIU Sujuan, JIANG Han. Engine remaining useful life prediction model based on R-vine copula with multi-sensor data [J]. *Heliyon*, 2023, 9(6): e17118.
- [14] 张建勋, 胡昌华, 周志杰, 等. 多退化变量下基于 Copula 函数的陀螺仪剩余寿命预测方法 [J]. *航空学报*, 2014, 35(4): 1111-1121.
- ZHANG Jianxun, HU Changhua, ZHOU Zhijie, et al. Multiple degradation variables modeling for remaining useful life estimation of gyros based on Copula function [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2014, 35(4): 1111-1121.
- [15] PENG Weiwen, YE Zhisheng, CHEN Nan. Joint on-line RUL prediction for multivariate deteriorating systems [J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2019, 15(5): 2870-2878.
- [16] YANG Chengqiang, GU Xiaohui, ZHAO Fangchao. Reliability analysis of degrading systems based on time-varying Copula [J]. *Microelectronics Reliability*, 2022, 136: 114628.
- [17] 王蕾, 程世娟, 韩雨. 基于时变 Copula 函数的多部件系统可靠性评估 [J]. *计算机应用*, 2024, 44(3): 953-959.
- WANG Lei, CHENG Shijuan, HAN Yu. Reliability evaluation of multi-component system based on time-varying Copula function [J]. *Journal of Computer Applications*, 2024, 44(3): 953-959.
- [18] XIAO Rui, ZAYED T, MEGUID M A, et al. Time varying reliability analysis of corroded gas pipelines using Copula and importance sampling [J]. *Ocean Engineering*, 2024, 306: 118086.
- [19] FERREIRA C, GONÇALVES G. Remaining useful life prediction and challenges: a literature review on the use of machine learning methods [J]. *Journal of Manufacturing Systems*, 2022, 63: 550-562.
- [20] JIANG Deyin, CHEN Tianyu, XIE Juanzhang, et al. A mechanical system reliability degradation analysis and remaining life estimation method: with the example of an aircraft hatch lock mechanism [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2023, 230: 108922.
- [21] SI Xiaosheng, WANG Wenbin, HU Changhua, et al. Remaining useful life estimation based on a nonlinear diffusion degradation process [J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2012, 61(1): 50-67.
- [22] 曹洁. 基于时变 Copula 技术的金融风险溢出测度改进及应用研究 [D]. 上海: 上海理工大学, 2021.
- [23] ZHANG Chao, CHEN Rentong, BAI Guanghan, et al. Reliability estimation of rotary lip seal in aircraft utility system based on time-varying dependence degradation model and its experimental validation [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2020, 33(8): 2230-2241.
- [24] JENG H A, SINGH R, DIAWARA N, et al. Application of wastewater-based surveillance and copula time-series model for COVID-19 forecasts [J]. *Science of the Total Environment*, 2023, 885: 163655.
- [25] CHEN Zhankun, JOHNSON C, D'AGOSTINO C. Distributions conditioned on extrapolated events via copula and extreme value theory [J]. *MethodsX*, 2024, 13: 103017.

(编辑 刘懿莹 赵炜)